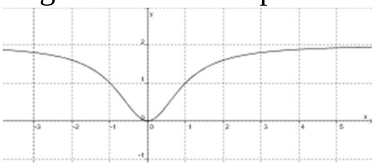
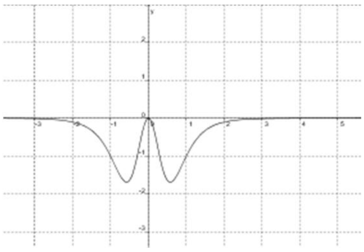
VB Klausur Analysis-Lösung

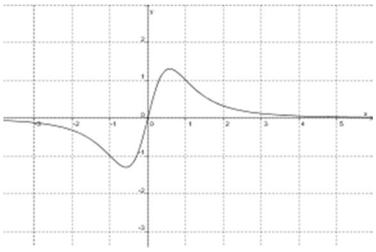
1. Bei den folgenden Aufgaben ist jeweils eine Antwort richtig
   a) f(x) = 4x²+c. Dann ist f‘(2) = …
   □ 8 ✓ 16 □ 2c
   b) Von der Funktion f ist bekannt: f‘(4) = 0, f‘(x)>0 für alle x≠4.
   Welche Aussage über die Funktion f ist falsch?
   □ Die Funktion ist monoton steigend ✓ x = 4 ist eine Extremstelle
   □ f besitzt an der Stelle x = 4 eine waagerechte Tangente.
   c) Gegeben ist der Graph der Funktion f. Geben Sie den Graph der Ableitungsfunktion f‘ an.



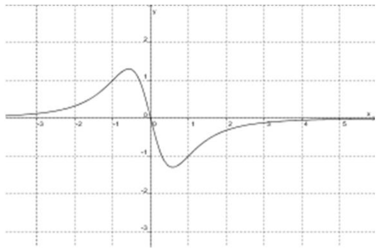
□



✓

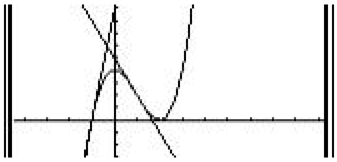


□



2. Bilden Sie die 1. Ableitung
   a) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{x} - \ln(\pi^2)$
   $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x^2}$
   b) $f(x) = x \cdot e^x$
   $f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x$
   c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$
   $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
   d) $f(x) = x^2\sqrt{x}$
   $f'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2\frac{1}{2\sqrt{x}}$
   $f'(x) = \frac{4x^2+x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$
   e) $f(x) = kx^2 + k$
   $f'(x) = 2kx$
   f) $f(x) = (2x^2 - x)^3$ $z = g(x) = 2x^2 - x; g'(x) = 4x - 1; f(z) = z^3; f'(z) = 3z^2$
   $f'(x) = 3z^2 \cdot (4x - 1) = 3(4x - 1)(2x^2 - x)^2$
   g) $f(x) = e^{x^2+1} + 1$
   $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$
   h) $f(t) = 2\sqrt{t}$
   $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

3. Gegeben ist die Funktion f(x) = (x+1)(x-2)²
   a) Zeige, dass gilt: f‘(x) = 3x² - 6x
   Produktregel: u=x+1; u‘=1; v=(x-2)²; v‘=2(x-2)1=2x-4
   $f'(x) = (x+1)(2x-4) + 1 \cdot (x-2)^2 = 2x^2 + 2x - 4x - 4 + x^2 - 4x + 4 = 3x^2 - 6x$
   b) Ermittle rechnerisch die Extrempunkte und weise die Art der Extrema nach.
   f‘‘(x)=6x-6
   f‘(x)=0→3x²-6x=0→3x(x-2)=0→x=0, x=2
   f‘‘(0)=-6<0→Max: (0|4); f‘‘(2)=6>0→Min: (2|f(2))=(2|0)
   c) t_1 ist eine Tangente an den Graph von f an der Stelle x_0=1. Berechne die Nullstelle von t_1.
   m = f‘(1)= -3; f(1)=2→ $2 = (-3) \cdot 1 + n \rightarrow n = 5$→ t_1:y = -3x + 5
   NST: y = 0→-3x+5=0→x=$\frac{5}{3}$
   d) t_2 ist eine Tangente an den Graph von f an der negativen Nullstelle. t_1, t_2 und die Abszissenachse bilden ein Dreieck. Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
   NST: f(x)=0→x=-1(, x=2),f‘(-1)=9; f(-1)=0; $\rightarrow 0 = 9 \cdot (-1) + n \rightarrow n = 9$→ t_2:y = 9x + 9

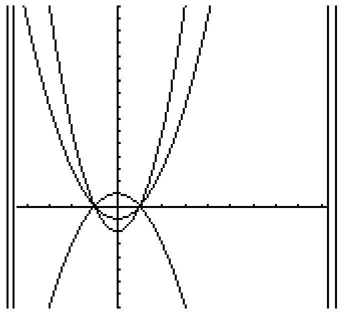


Schnittpunkt:
$t_1 \cap t_2: -3x+5 = 9x+9; -4 = 12x \rightarrow x = -\frac{1}{3} \rightarrow S\left(-\frac{1}{3}\middle|6\right)$
$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{\frac{8}{3} \cdot 6}{2} = 8FE$; g: Abstand der NST, h ist Ordinate des Schnittpunktes

e) Ermittle rechnerisch den Wendpunkt von f.
f‘‘‘(x)=6; f‘‘(x)=0→6x-6=0→x=1; f‘‘‘(1)=6≠0→WP(1|2)

f) Gib die Monotonie-Intervalle an.
steigend: x<0; x>2; fallend: 0<x<2

4. Gegeben ist die Funktion $f_k(x) = kx^2 - k$, k≠0



a) Zeichne die Funktionen f_{-1}, f_1, f_2 in ein Koordinatensystem

b) Zeige, dass die Nullstellen unabhängig von k sind
f(x)=0→kx²-k=0→kx²=k→x²=1→x=±1

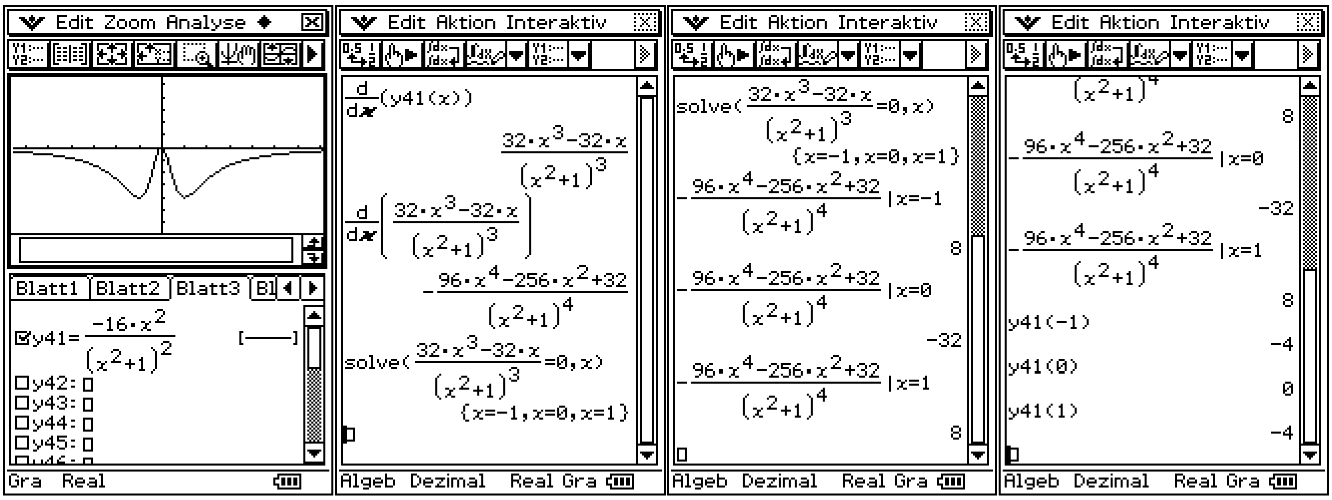
c) Gib die 1. Ableitung der Funktion an.
f‘(x)=2kx

d) Ermittle die Koordinaten der Extrempunkte in Abhängigkeit von k und die Art der Extrema an.
f‘‘(x)=2k; f‘(x)=0→2kx=0→x=0
f‘‘(0)=2k ; ist k>0 ist auch 2k>0→ MIN (0|-k); k<0→2k<0→MAX (0|-k)

5. (CAS) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{-16x^2}{(x^2+1)^2}$

a) Skizzieren Sie die Funktion mithilfe des Rechners

b) Ermitteln Sie rechnerisch die Extrempunkte der Funktion. Nutzen Sie dazu nicht das Grafikmenu, sondern die entsprechenden Rechner-Befehle



f‘(x)=0→x=-1, x=0; x=1 (diff- und solve-Befehl)
f‘‘(-1)=8>0→MIN (-1|-4); f‘‘(0)=-4<0→MAX (0|0); f‘‘(1)=8>0→MIN (1|-4)